

Introducción a la Econometría

Capítulo 2

Ezequiel Uriel Jiménez
Universidad de Valencia

Valencia, Septiembre de 2013

2. El modelo de regresión lineal simple: estimación y propiedades

2.1 Algunas definiciones en el modelo de regresión simple

2.2 Obtención de las estimaciones por *MCO*

2.3 Algunas características de los estimadores de *MCO*

2.4 Las unidades de medida y la forma funcional

2.5 Supuestos y propiedades estadísticas de los *MCO*

Ejercicios

**Anexo 2.1 Un caso de estudio: Curvas de Engel para la
demanda de productos lácteos**

Apéndices

2.1 Algunas definiciones en el modelo de regresión simple

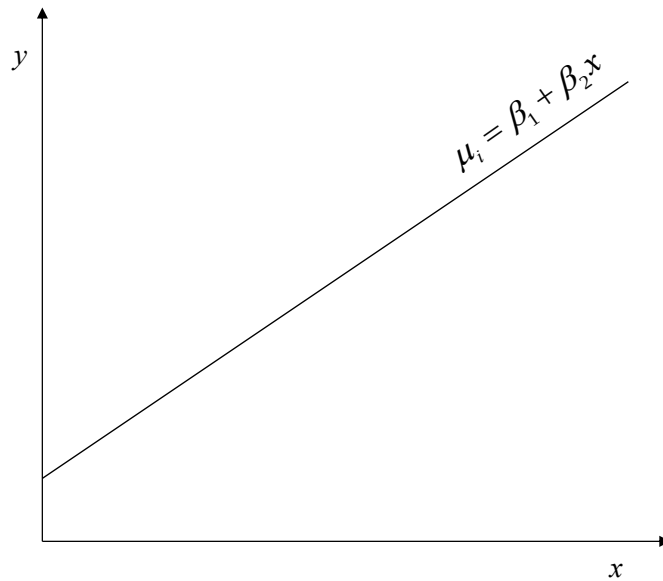


FIGURA 2.1. La función de regresión poblacional. (FRP)

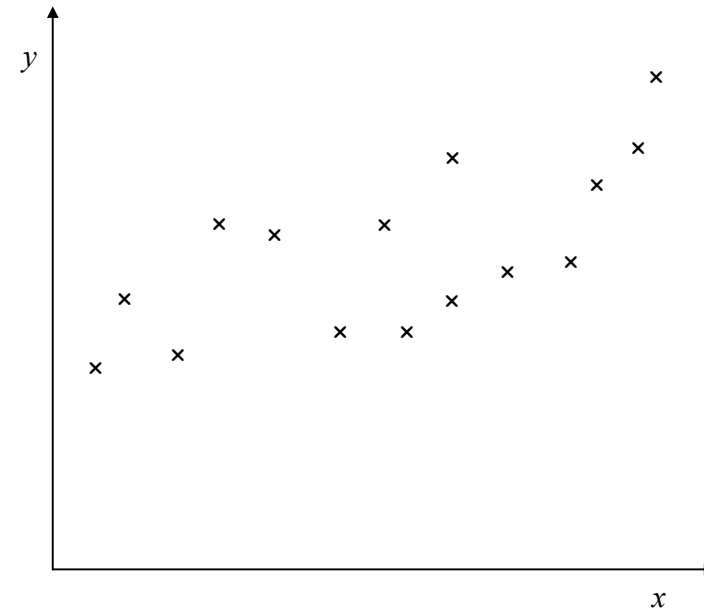


FIGURA 2.2. Diagrama de dispersión.

2.1 Algunas definiciones en el modelo de regresión simple

2. El modelo de regresión lineal simple

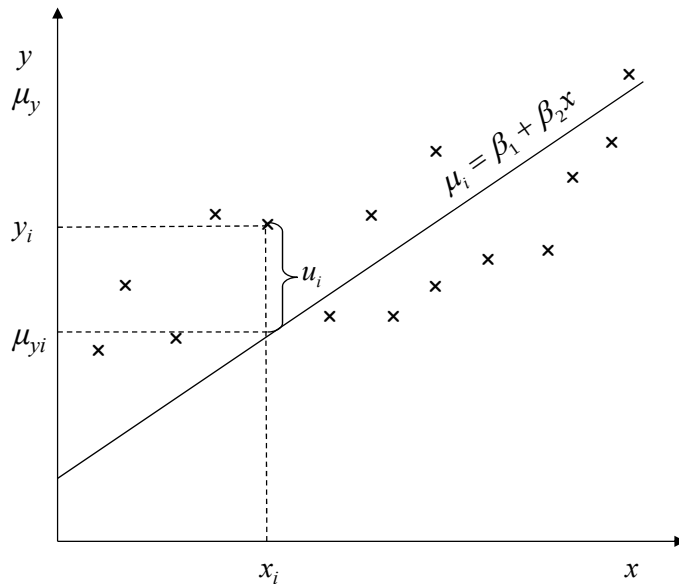


FIGURA 2.3. La función de regresión poblacional y el diagrama de dispersión.

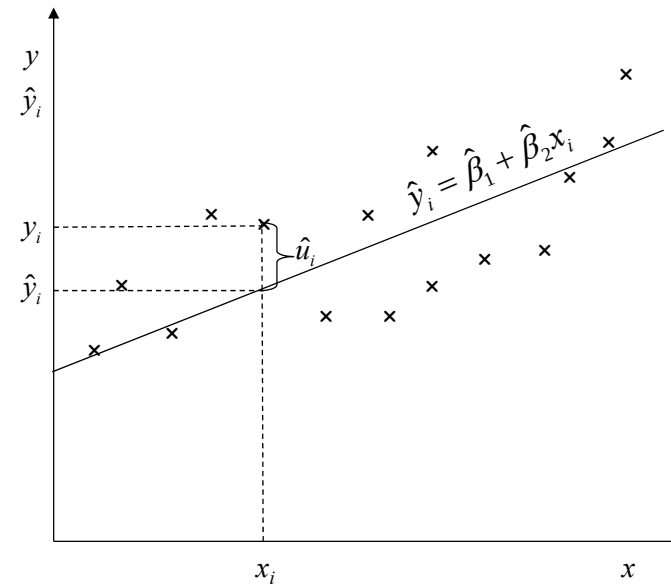


FIGURA 2.4. La función de regresión simple y el diagrama de dispersión.

2.2 Obtención de las estimaciones por Mínimos Cuadrados Ordinarios

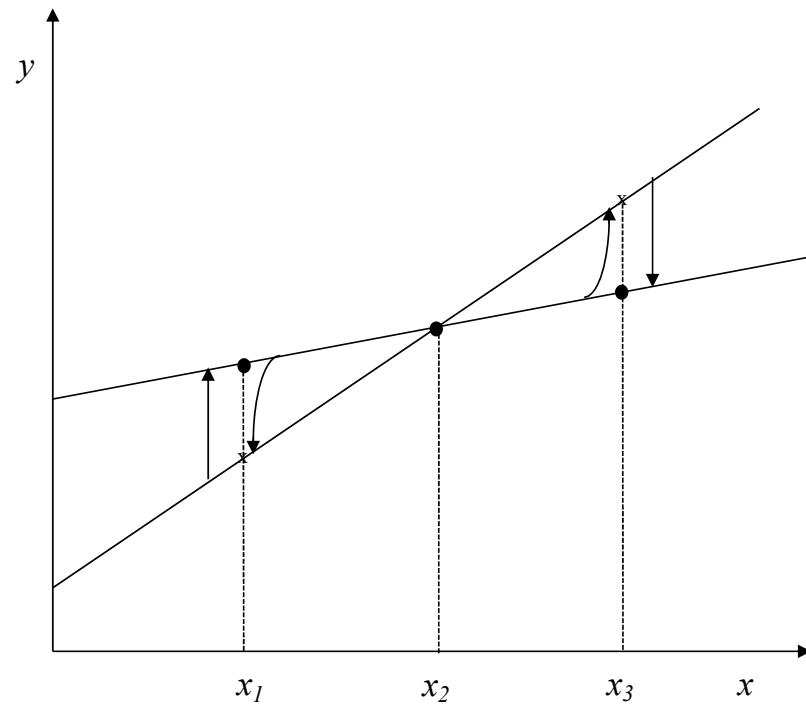


FIGURA 2.5. Los problemas del criterio 1.

2.2 Obtención de las estimaciones por Mínimos Cuadrados Ordinarios

EJEMPLO 2.1 La estimación de la función de consumo

$$cons = \beta_1 + \beta_2 inc + u_i$$

CUADRO 2.1. Datos y cálculos para estimar la función de consumo.

Observ	$cons_i$	$renta_i$	$cons_i \times$ $renta_i$	$renta_i^2$	$cons_i - \overline{cons}$	$renta_i - \overline{renta}$	$(cons_i - \overline{cons})$ $\times$ $(renta_i - \overline{renta})$	$(renta_i - \overline{renta})^2$
1	5	6	30	36	-4	-5	20	25
2	7	9	63	81	-2	-2	4	4
3	8	10	80	100	-1	-1	1	1
4	10	12	120	144	1	1	1	1
5	11	13	143	169	2	2	4	4
6	13	16	208	256	4	5	20	25
Suma	54	66	644	786	0	0	50	60

$$\overline{cons} = \frac{54}{6} = 9 \quad \overline{inc} = \frac{66}{6} = 11 \quad (2-17): \hat{\beta}_2 = \frac{644 - 9 \times 66}{786 - 11 \times 66} = 0.83$$

$$(2-18): \hat{\beta}_2 = \frac{50}{60} = 0.83$$

$$\hat{\beta}_1 = 9 - 0.83 \times 11 = -0.16$$

2.3 Algunas características de los estimadores de MCO

EJEMPLO 2.2 Cumplimiento de las propiedades algebraicas y R^2 en la función de consumo

$$SCT = 42 \quad SCE = 41.67 \quad SRC = 42 - 41.67 = 0.33 \quad R^2 = \frac{41.67}{42} = 0.992$$

O, alternatively,

$$R^2 = 1 - \frac{0.33}{42} = 0.992$$

CUADRO 2.2. Datos y cálculos para estimar la función de consumo.

Observ.	$\widehat{cons}_i$	$\hat{u}_i$	$\hat{u}_i \times renta_i$	$\widehat{cons}_i \times \hat{u}_i$	$cons_i^2$	$(cons_i - \overline{cons})^2$	$\widehat{cons}_i^2$	$(\widehat{cons}_i - \overline{\widehat{cons}})^2$
1	4.83	0.17	1	0.81	25	16	23.36	17.36
2	7.33	-0.33	-3	-2.44	49	4	53.78	2.78
3	8.17	-0.17	-1.67	-1.36	64	1	66.69	0.69
4	9.83	0.17	2	1.64	100	1	96.69	0.69
5	10.67	0.33	4.33	3.56	121	4	113.78	2.78
6	13.17	-0.17	-2.67	-2.19	169	16	173.36	17.36
	54	0	0	0	528	42	527.67	41.67

2.3 Algunas características de los estimadores de *MCO*

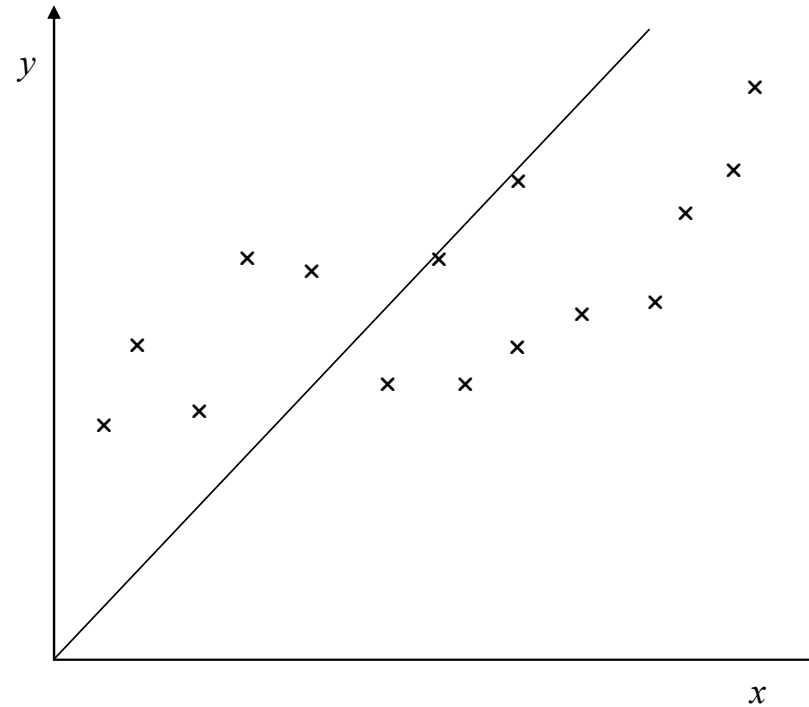


FIGURA 2.6. Una regresión a través del origen.

2.4 Las unidades de medida y la forma funcional

EJEMPLO 2.3

$$(2-39) : \widehat{cons}_i = 0.2 + 0.85 \times inc_i$$

$$ince = inc \times 1000$$

$$\widehat{cons}_i = 0.2 + 0.00085 \times ince_i$$

EJEMPLO 2.4

$$conse = cons \times 1000$$

$$\widehat{conse}_i = 200 + 850 \times inc_i$$

2.4 Las unidades de medida y la forma funcional

EJEMPLO 2.5

$$\overline{inc} = 20$$

$$incd_i = inc_i - \overline{inc}$$

$$\widehat{cons}_i = (0.2 + 0.85 \times 20) + 0.85 \times (inc_i - 20) = 17.2 + 0.85 \times incd_i$$

EJEMPLO 2.6

$$\overline{cons} = 15$$

$$consd_i = cons_i - \overline{cons}$$

$$\widehat{cons}_i - 15 = 0.2 - 15 + 0.85 \times inc_i$$

$$\widehat{consd}_i = -14.8 + 0.85 \times inc_i$$

2.4 Las unidades de medida y la forma funcional

CUADRO 2.3. Ejemplos de cambios proporcionales y cambios en logaritmos.

x_1	202	210	220	240	300
x_0	200	200	200	200	200
Cambio proporcional en%	1%	5.0%	10.0%	20.0%	50.0%
Cambio en logaritmos en%	1%	4.9%	9.5%	18.2%	40.5%

2.4 Las unidades de medida y la forma funcional

EJEMPLO 2.7 Cantidad de café vendido como una función de su precio. Modelo lineal (fichero coffee1)

$$coffqty = \beta_1 + \beta_2 coffpric + u$$

$$\widehat{coffqty} = 774.9 - 693.33coffpric \quad R^2 = 0.95 \quad n = 12$$

CUADRO 2.4. Datos sobre cantidades y precios del café.

<i>semana</i>	<i>coffpric</i>	<i>coffqty</i>
1	1.00	89
2	1.00	86
3	1.00	74
4	1.00	79
5	1.00	68
6	1.00	84
7	0.95	139
8	0.95	122
9	0.95	102
10	0.85	186
11	0.85	179
12	0.85	187

2.4 Las unidades de medida y la forma funcional

EJEMPLO 2.8 Explicando el valor de mercado de los bancos españoles. Modelo lineal (fichero bolmad95)

$$\widehat{marktval} = 29.42 + 1.219bookval$$
$$R^2 = 0.836 \quad n = 20$$

EJEMPLO 2.9 Cantidad de café vendido en función de su precio. Modelo doblemente logarítmico (Continuación del ejemplo 2.7) (fichero coffee1)

$$\ln(\widehat{coffqty}) = 4.415 - 5.132 \ln(coffpric)$$
$$R^2 = 0.90 \quad n = 12$$

2.4 Las unidades de medida y la forma funcional

EJEMPLO 2.10 Explicando el valor de mercado de los bancos españoles. Modelo doblemente logarítmico (Continuación del ejemplo 2.8) (fichero bolmad95)

$$\widehat{\ln(\text{marktval})} = 0.6756 + 0.938 \ln(\text{bookval})$$

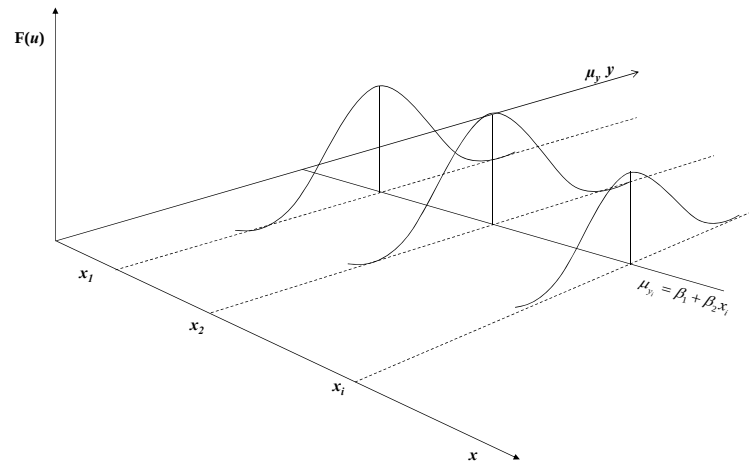
$$R^2 = 0.928 \quad n = 20$$

CUADRO 2.5. Interpretación de en los diferentes modelos.

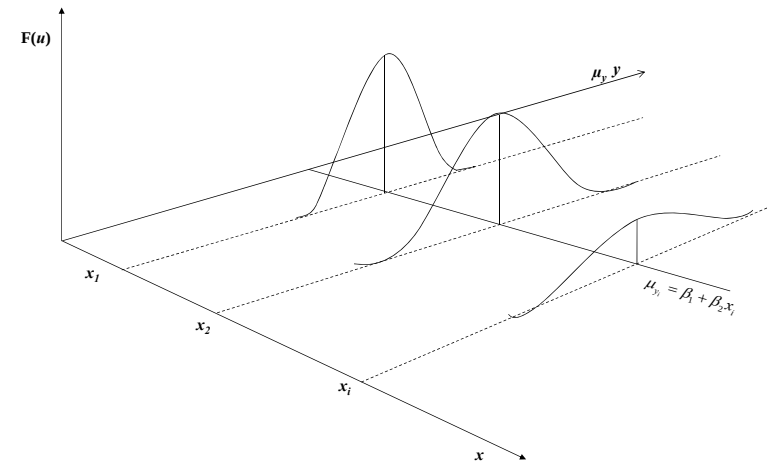
Modelo	Si x aumenta en	entonces y
		se incrementará en
lineal	1 unidad	$\hat{\beta}_2$ unidades
lineal logarítmico	1%	$(\hat{\beta}_2 / 100)$ unidades
logarítmico lineal	1 unidad	$(100\hat{\beta}_2)\%$
doblemente logarítmico	1%	$\hat{\beta}_2\%$

2.5 Supuestos y propiedades estadísticas de los *MCO*

2. El modelo de regresión lineal simple



a)



b)

FIGURA 2. 7. Perturbaciones aleatorias:
a) homoscedasticidad; b) heteroscedasticidad.

2.5 Supuestos y propiedades estadísticas de los *MCO*

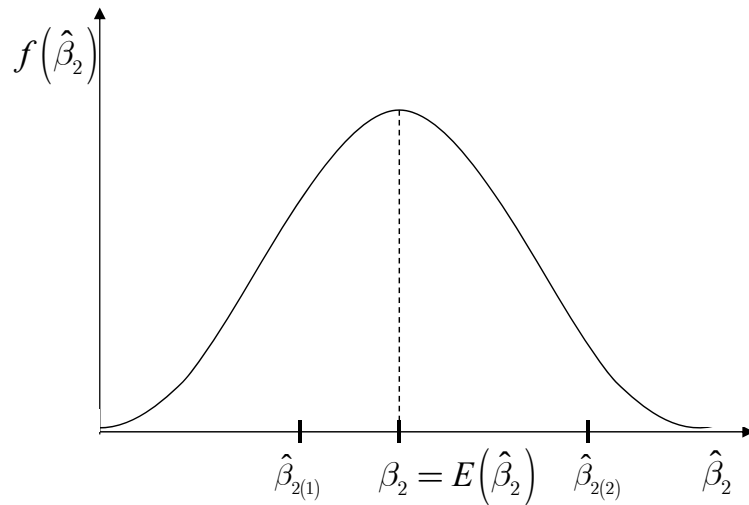


FIGURA 2.8. Estimador insesgado.

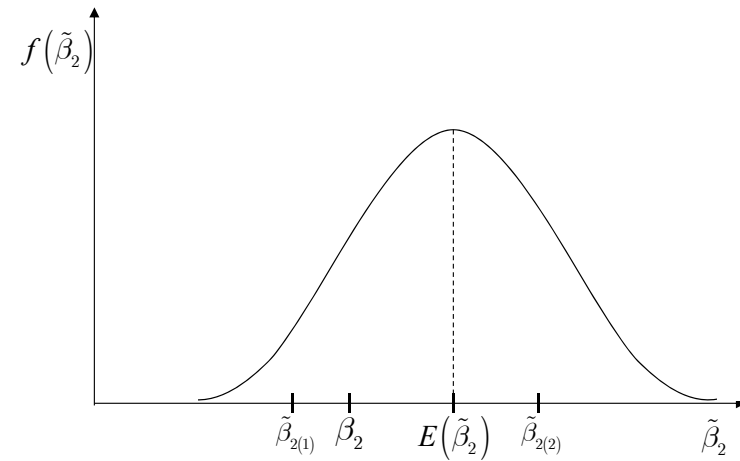


FIGURA 2.9. Estimador sesgado.

2.5 Supuestos y propiedades estadísticas de los *MCO*

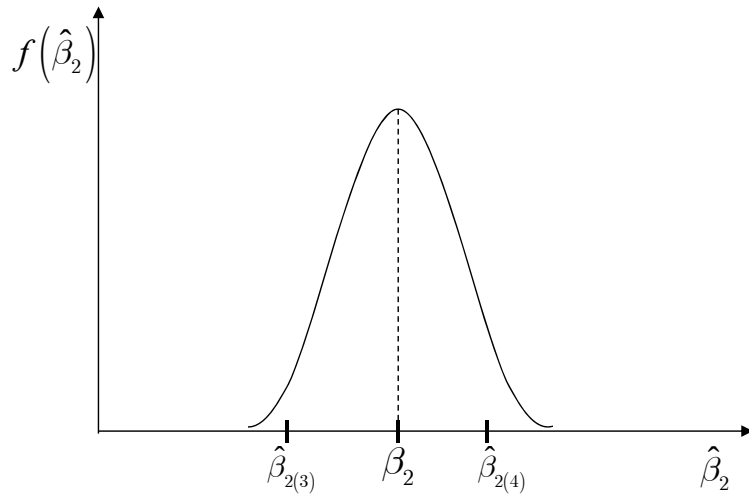


FIGURA 2.10. Estimador con varianza pequeña.

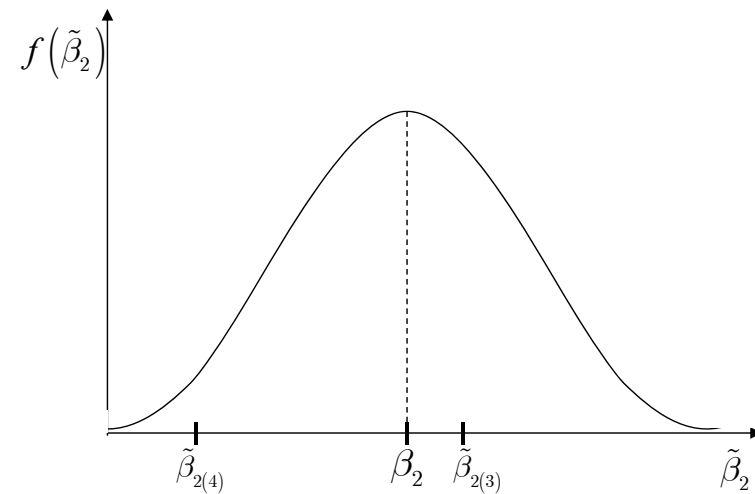


FIGURA 2.11. Estimador con una varianza grande.

2.5 Supuestos y propiedades estadísticas de los *MCO*

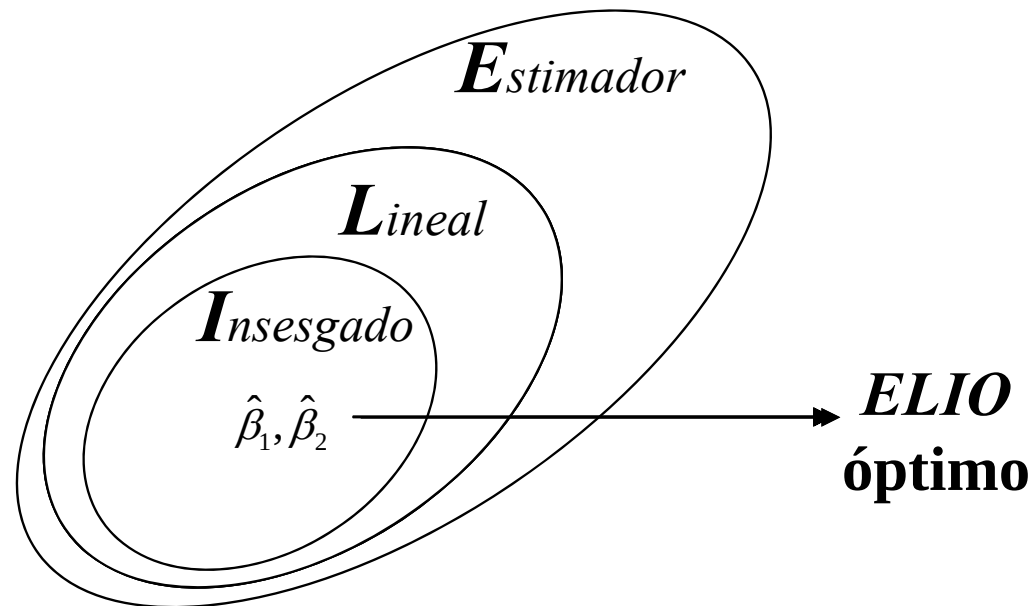


FIGURA 2.12. Los estimadores *MCO* son *ELIO*.

2.5 Supuestos y propiedades estadísticas de los *MCO*

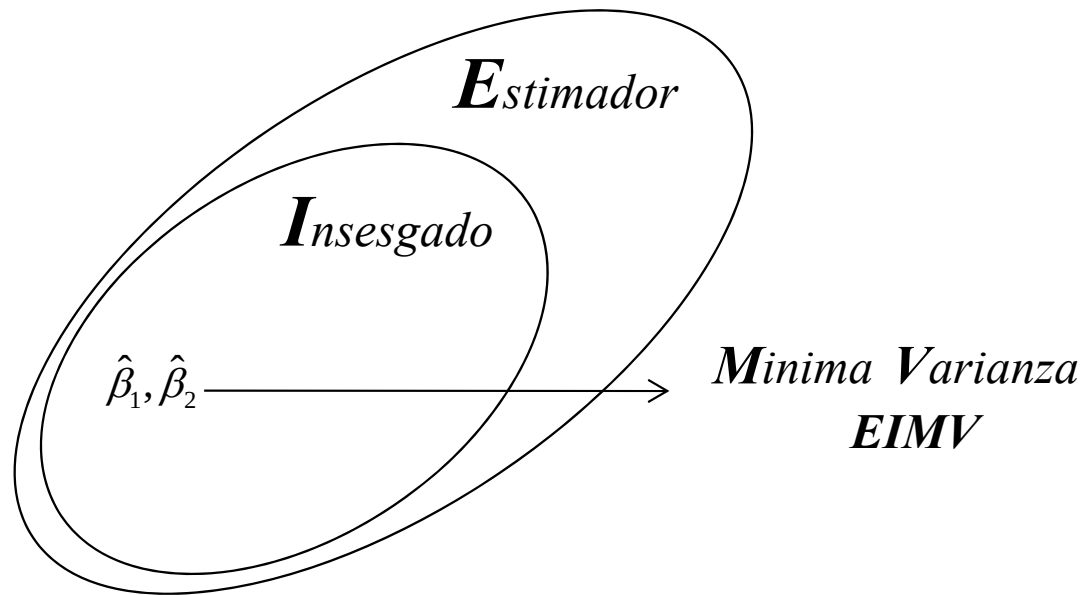


FIGURA 2.13. Los estimadores *MCO* son *EIMV*.

Anexo 2.1 Un caso de estudio: Curvas de Engel para la demanda de productos lácteos (fichero demand)

CUADRO 2.6 Gasto en productos lácteos (*dairy*), renta disponible (*inc*) en términos per capita. (Unidad: euros por mes). n=40

<i>familia</i>	<i>dairy</i>	<i>inc</i>	<i>familia</i>	<i>dairy</i>	<i>inc</i>
1	8.87	1.25	21	16.2	2.1
2	6.59	985	22	10.39	1.47
3	11.46	2.175	23	13.5	1.225
4	15.07	1.025	24	8.5	1.38
5	15.6	1.69	25	19.77	2.45
6	6.71	670	26	9.69	910
7	10.02	1.6	27	7.9	690
8	7.41	940	28	10.15	1.45
9	11.52	1.73	29	13.82	2.275
10	7.47	640	30	13.74	1.62
11	6.73	860	31	4.91	740
12	8.05	960	32	20.99	1.125
13	11.03	1.575	33	20.06	1.335
14	10.11	1.23	34	18.93	2.875
15	18.65	2.19	35	13.19	1.68
16	10.3	1.58	36	5.86	870
17	15.3	2.3	37	7.43	1.62
18	13.75	1.72	38	7.15	960
19	11.49	850	39	9.1	1.125
20	6.69	780	40	15.31	1.875

Anexo 2.1 Un caso de estudio: Curvas de Engel para la demanda de productos lácteos

Modelo lineal

$$dairy = \beta_1 + \beta_2 inc + u$$

$$\frac{d \text{ dairy}}{d \text{ inc}} = \beta_2$$

$$\varepsilon_{dairy/inc}^{linear} = \frac{d \text{ dairy}}{d \text{ inc}} \frac{inc}{dairy} = \beta_2 \frac{inc}{dairy}$$

$$\widehat{dairy} = 4.012 + 0.005288 \times inc \quad R^2 = 0.4584$$

Anexo 2.1 Un caso de estudio: Curvas de Engel para la demanda de productos lácteos

Modelo inverso

$$dairy = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{inc} + u$$

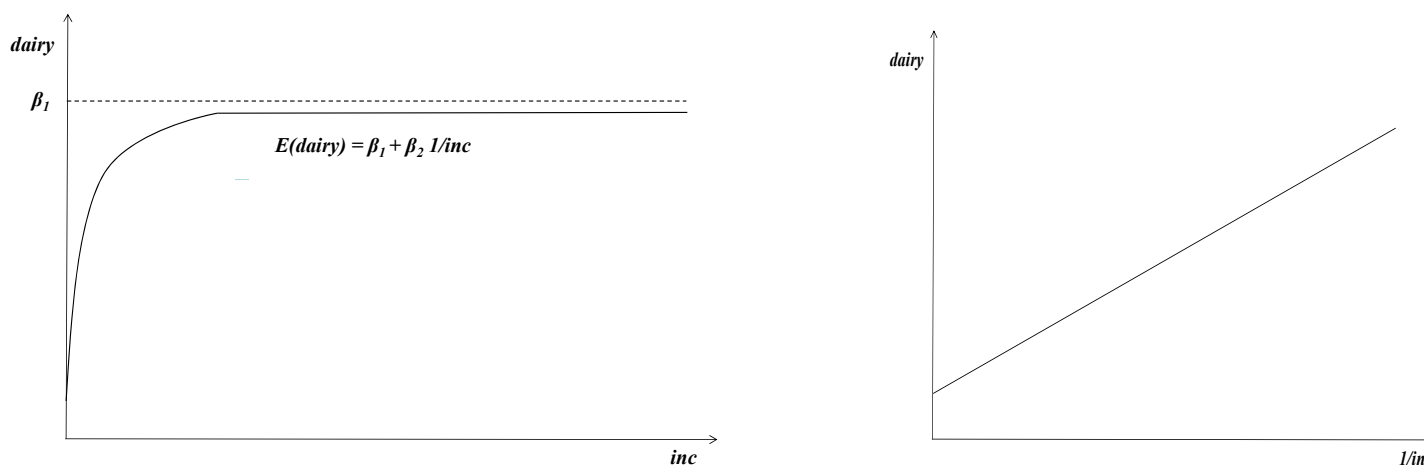


FIGURA 2.14. El modelo inverso.

$$\frac{d \text{ dairy}}{d \text{ inc}} = -\beta_2 \frac{1}{(inc)^2}$$

$$\varepsilon_{dairy/inc}^{inv} = \frac{d \text{ dairy}}{d \text{ inc}} \frac{inc}{dairy} = -\beta_2 \frac{1}{inc \times dairy}$$

$$\widehat{dairy} = 18.652 - 8702 \frac{1}{inc} \quad R^2 = 0.4281$$

Anexo 2.1 Un caso de estudio: Curvas de Engel para la demanda de productos lácteos

Modelo lineal logarítmico

$$dairy = \beta_1 + \beta_2 \ln(inc) + u$$

$$\frac{d \text{ dairy}}{d \text{ inc}} = \frac{d \text{ dairy}}{d \text{ inc}} \frac{inc}{inc} = \frac{d \text{ dairy}}{d \ln(inc)} \frac{1}{inc} = \beta_2 \frac{1}{inc}$$

$$\varepsilon_{dairy/inc}^{lin-log} = \frac{d \text{ dairy}}{d \text{ inc}} \frac{inc}{dairy} = \frac{d \text{ dairy}}{d \ln(inc)} \frac{1}{dairy} = \beta_2 \frac{1}{dairy}$$



FIGURA 2.15. El modelo lineal logarítmico.

$$\widehat{dairy} = -41.623 + 7.399 \times \ln(inc) \quad R^2 = 0.4567$$

Anexo 2.1 Un caso de estudio: Curvas de Engel para la demanda de productos lácteos

Modelo potencial o doblemente logarítmico

$$dairy = e^{\beta_1} inc^{\beta_2} e^u$$

$$\ln(dairy) = \beta_1 + \beta_2 \ln(inc) + u$$

$$\frac{d \, dairy}{d \, inc} = \beta_2 \frac{dairy}{inc}$$

$$\varepsilon_{dairy/inc}^{log-log} = \frac{d \, dairy}{d \, inc} \frac{inc}{dairy} = \frac{d \, \ln(dairy)}{d \, \ln(inc)} = \beta_2$$

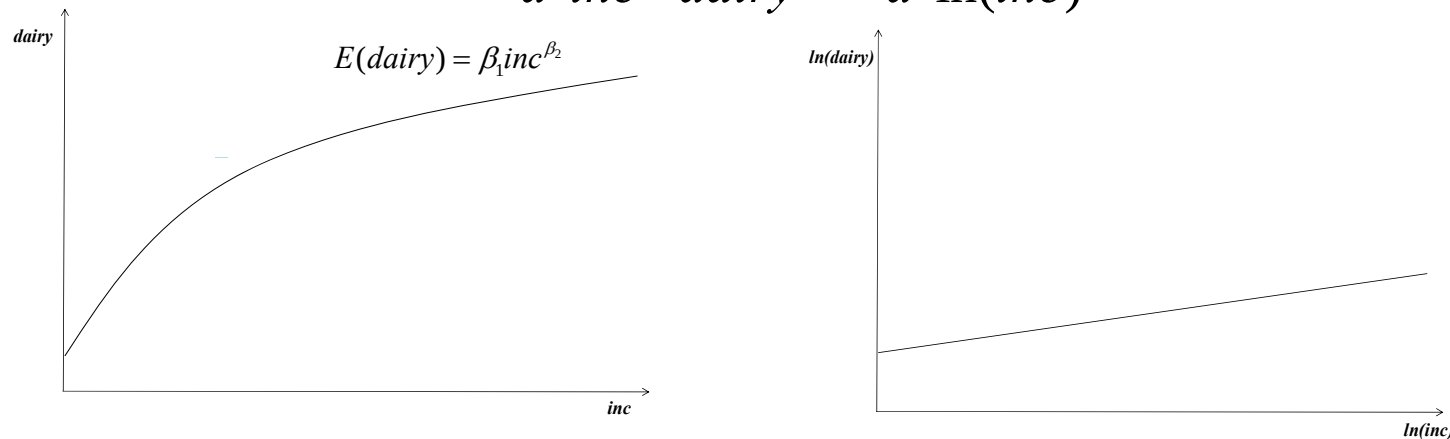


FIGURA 2.16. Modelo doblemente logarítmico.

[24]

$$\widehat{\ln(dairy)} = -2.556 + 0.6866 \times \ln(inc) \quad R^2 = 0.5190$$

Anexo 2.1 Un caso de estudio: Curvas de Engel para la demanda de productos lácteos

Modelo exponencial

$$dairy = \exp(\beta_1 + \beta_2 inc + u)$$

$$\ln(dairy) = \beta_1 + \beta_2 inc + u$$

$$\frac{d \text{ dairy}}{d \text{ inc}} = \beta_2 \text{ dairy}$$

$$\varepsilon_{dairy/inc}^{exp} = \frac{d \text{ dairy}}{d \text{ inc}} \frac{inc}{dairy} = \frac{d \ln(dairy)}{d \text{ inc}} inc = \beta_2 inc$$

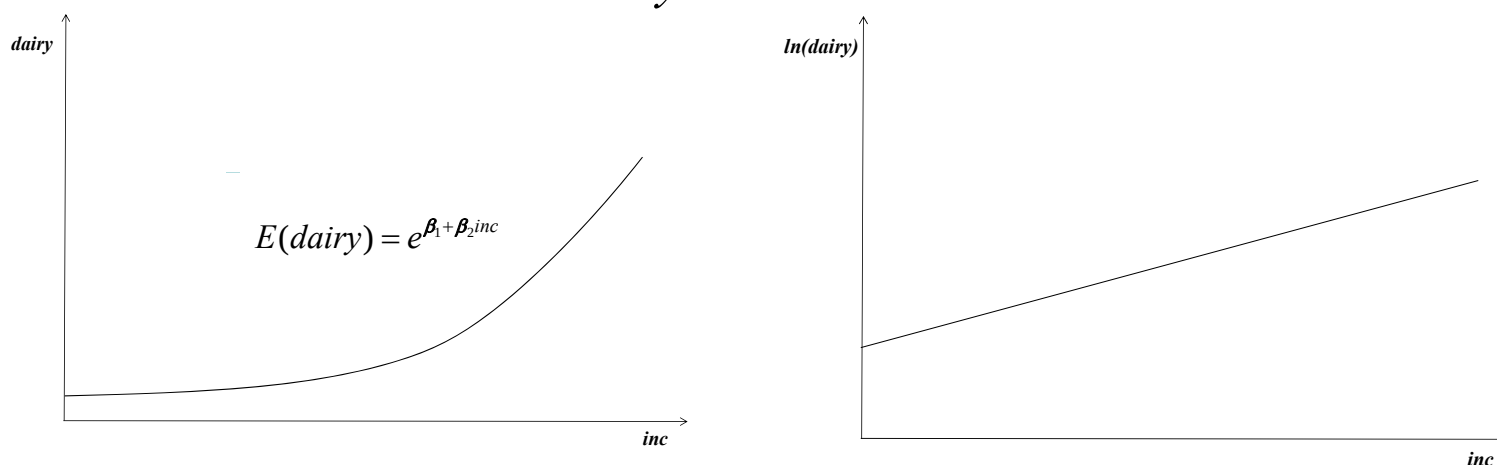


FIGURA 2.17. El modelo exponencial.

$$\widehat{\ln(dairy)} = 1.694 + 0.00048 \times inc \quad R^2 = 0.4978$$

Anexo 2.1 Un caso de estudio: Curvas de Engel para la demanda de productos lácteos

Modelo exponencial inverso

$$dairy = \exp(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{inc} + u)$$

$$\ln(dairy) = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{inc} + u$$

$$\frac{d \text{ dairy}}{d \text{ inc}} = -\beta_2 \frac{dairy}{(inc)^2}$$

$$\varepsilon_{dairy/inc}^{invexp} = \frac{d \text{ dairy}}{d \text{ inc}} \frac{inc}{dairy} = \frac{d \ln(dairy)}{d \text{ inc}} inc = -\beta_2 \frac{1}{inc}$$

$$\widehat{\ln(dairy)} = 3.049 - 822.02 \frac{1}{inc} \quad R^2 = 0.5040$$

Anexo 2.1 Un caso de estudio: Curvas de Engel para la demanda de productos lácteos

CUADRO 2.7. Propensión marginal, elasticidad gasto/renta y R^2 en los modelos estimados para analizar la demanda de productos lácteos.

<i>Modelo</i>	<i>Propensión marginal</i>	<i>Elasticidad</i>	R_2
<i>Lineal</i>	$\hat{\beta}_2 = 0.0053$	$\hat{\beta}_2 \frac{\overline{inc}}{\overline{dairy}} = 0.6505$	0.4440
<i>Inverso</i>	$-\hat{\beta}_2 \frac{1}{[\overline{inc}]^2} = 0.0044$	$-\hat{\beta}_2 \frac{1}{\overline{dairy} \times \overline{inc}} = 0.5361$	0.4279
<i>Lineal logarítmico</i>	$\hat{\beta}_2 \frac{1}{\overline{inc}} = 0.0052$	$\hat{\beta}_2 \frac{1}{\overline{dairy}} = 0.6441$	0.4566
<i>Doblemente logarítmico</i>	$\hat{\beta}_2 \frac{\overline{dairy}}{\overline{inc}} = 0.0056$	$\hat{\beta}_2 = 0.6864$	0.5188
<i>Logarítmico lineal</i>	$\hat{\beta}_2 \times \overline{dairy} = 0.0055$	$\hat{\beta}_2 \times \overline{inc} = 0.6783$	0.4976
<i>Logarítmico inverso</i>	$-\hat{\beta}_2 \frac{\overline{dairy}}{[\overline{inc}]^2} = 0.0047$	$-\hat{\beta}_2 \frac{1}{\overline{inc}} = 0.5815$	0.5038